S 372

Durée : 4 heures

*Les **deux** exercices et **le** problème sont obligatoires.*
Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.
Les seules calculatrices autorisées sont les calculatrices non programmables.

Exercice 1

On considère une série statistique double de caractères X et Y. On désigne par (Δ) la droite de régression de Y en X puis par (Δ') la droite de régression de X en Y. Les droites (Δ) et (Δ') ont pour équations respectives $y = u_0 x + 2{,}5532$ et $x = u_1 y + 2{,}5532$, où u_0 et u_1 sont les deux premiers termes de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_6 = 0{,}9512$ et $u_8 = 1{,}6406$.

1- Résous dans $\mathbb{R}^2$, le système (S): $\begin{cases} a + 6b = 0{,}9512 \\ a + 8b = 1{,}6406 \end{cases}$ d'inconnue (a, b).

2- Justifie que pour tout entier naturel n, $u_n = 0{,}3447n - 1{,}117$.

3- Calcule le coefficient de corrélation linéaire de la série double de caractères X et Y puis interprète le résultat obtenu.

Exercice 2

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z, (E): $z^3 + 9z + 26 = 0$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Les solutions z_A, z_B et z_C de (E) sont les affixes respectives des points A, B et C telles que $\text{Im}(z_C) < \text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B)$.

1- Justifie que : $z^3 + 9z + 26 = (z + 2)(z^2 - 2z + 13)$.

2- Résous l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

3- a) Justifie que : $z_A = -2$, $z_B = 1 + 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - 2i\sqrt{3}$.

b) Justifie que le triangle ABC est isocèle.

4- Détermine l'ensemble :

a) (E_1) des points M du plan d'affixes z telles que : $|3z - 3 + 6i\sqrt{3}| = 12$.

b) (E_2) des points M du plan d'affixes z telles que : $|z - 2| = |\bar{z} - 1 + 2i\sqrt{3}|$.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x+2)\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x\right)$.

On note (C) la courbe représentative de f et (Γ) la parabole d'équation :

$y = \frac{1}{2}x(x+2)$.

1- Justifie que le point $K(-2;0)$ appartient à (C) et à (Γ).

2- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3- a) Justifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = (x+1)(1-e^{-x}).$$

b) Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variations.

4- Etudie la position relative de (C) et de (Γ).

5- Détermine le sommet et le paramètre de (Γ).

6- Construis (C) et (Γ) dans le même repère.

7- Soit t un nombre réel supérieur à zéro.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule : $\int_{-2}^{t}(x+2)\,e^{-x}dx$.

b) Calcule l'aire $A(t)$, en unité d'aire, du domaine délimité par (C), (Γ) et les droites d'équations $x=-2$ et $x=t$.

c) Calcule la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

FIN