S 552

Durée : 4 heures

*Les **deux exercices** et **le problème** sont obligatoires.*

Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Les seules calculatrices autorisées sont les calculatrices non programmables.

Exercice 1

1- Deux entiers naturels x et y sont tels que : $\begin{cases} x+y=91 \\ PPCM(x,y)=156 \end{cases}$

a) Détermine $PGCD(x,y)$.

b) Déduis-en les couples (x,y) possibles.

2- Justifie que pour tout entier naturel n, la fraction $\frac{52n+5}{39n+4}$ est irréductible.

Exercice 2

Soit A, B, C et D quatre points du plan (P) tels que $AB = 2a,\ AC = a\sqrt{3}, BC = \frac{3}{2}a$ et

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1- Justifie que D est le barycentre du système $\{(A;1),(B;-2),(C;3)\}$.

2- On considère l'application ϕ du plan (P) dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $3\overrightarrow{DM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$.

Détermine la nature de ϕ et précise ses éléments caractéristiques.

3- Soit k un nombre réel.

On désigne par (Γ_k) l'ensemble des points M de (P) tels que :

$$MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = ka^2.$$

a) Exprime $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Justifie que pour tout point M de (P), $M \in (\Gamma_k)$ équivaut à

$$2MD^2 + DA^2 - 2DB^2 + 3DC^2 = ka^2.$$

c) Détermine, suivant les valeurs de k, la nature et les éléments caractéristiques de (Γ_k).

Problème

Partie A

On considère sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles (E): $4y'' + 12y' + 9y = -9x + 6$ et (E_0): $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

1- Résous l'équation différentielle (E_0).

2- Détermine les nombres réels α et β tels que la fonction $u: x \mapsto \alpha x + \beta$ soit solution de (E).

3- Soit h une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Justifie que h est solution de (E) si et seulement si $(h - u)$ est solution de (E_0).

b) Déduis-en les solutions de (E).

c) Détermine la solution g de (E) qui vérifie $g(0) = 4$ et $g'(0) = -3$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-\frac{3}{2}x} - x + 2$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

4- Détermine $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

5- a) Etudie les variations de la fonction f'.

b) Justifie que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique x_0 et que $-1{,}5 < x_0 < -1{,}4$.

c) Détermine le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

6- Achève l'étude des variations de f.

7- Etudie les branches infinies de (C) puis construis-la.

Partie C

On désigne par φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = f(x) + x$ et

par (v_n) la suite définie pour tout n élément de $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \varphi(v_n) \end{cases}$.

8- a) Etudie les variations de φ.

b) Démontre que l'équation $\varphi(x) = x$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution unique α et que α appartient à $I = [2; 3]$.

9- Démontre que pour tout x de $[2; 3]$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{13}{2}e^{-3}$.

Déduis-en que pour tout x élément de I, $|\varphi(x) - \alpha| \leq \frac{13}{2e^3}|x - \alpha|$.

10- a) Démontre que pour x élément de I, $\varphi(x)$ appartient à I.

Déduis-en que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $v_n \in I$.

b) Démontre que pour tout entier naturel n, on a : $|v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{13}{2e^3}|v_n - \alpha|$.

c) Déduis de ce qui précède que pour tout entier naturel n, on a :

$$|v_n - \alpha| \leq \left(\frac{13}{2e^3}\right)^n.$$

11- a) Détermine la limite de la suite (v_n).

b) Détermine le plus petit entier naturel n_0 tel que v_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3}près.

FIN