REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session: 2020
Série: C-SI
Coef.: 5
Durée: 4heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'usage de la calculatrice est autorisé

Exercice 1 : Questions à Choix Multiples. (5 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. ***Exemple : Question 1.a. Réponse A et 1.b. Réponse C***

Une bonne réponse rapporte **1pt (0,5pt + 0,5pt)**, une mauvaise réponse fait perdre 0,25 point, l'absence de réponse ne donne droit à aucun point et n'en fait perdre aucun ; si le total des points est négatif, la note à cet exercice est ramenée à zéro.

1. On note (C) la courbe représentative dans un repère orthonormal de la fonction f définie sur $K=[1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x\ln x}{x+1}$.

a) Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
(C) admet une asymptote oblique	(C) admet une branche parabolique	(C) admet une asymptote verticale	(C) admet une asymptote horizontale

b) Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
f est strictement décroissante sur K	f est constante K	f n'est pas strictement monotone sur K	f est strictement croissante sur K

2. Soient A $(1;-1;0)$, B$(3;0;1)$, C$(1;2;-1)$ et D$(1;0;0)$ quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ alors :

a) $|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}|$ est égal à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
2	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$

b) Une équation cartésienne du plan (ABC) est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$2x-y-3z-3=0$	$2x+y+3z-3=0$	$2x-y-3z+3=0$	Aucune des réponses n'est juste

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. On pose $Z=\frac{-i+\sqrt{3}}{2}\bar{z}$

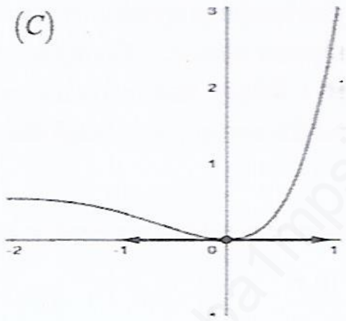
a) Un argument de Z est alors :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$-\frac{\pi}{6}+\theta$	$-\frac{\pi}{6}-\theta$	$\frac{\pi}{6}-\theta$	$\frac{\pi}{6}+\theta$

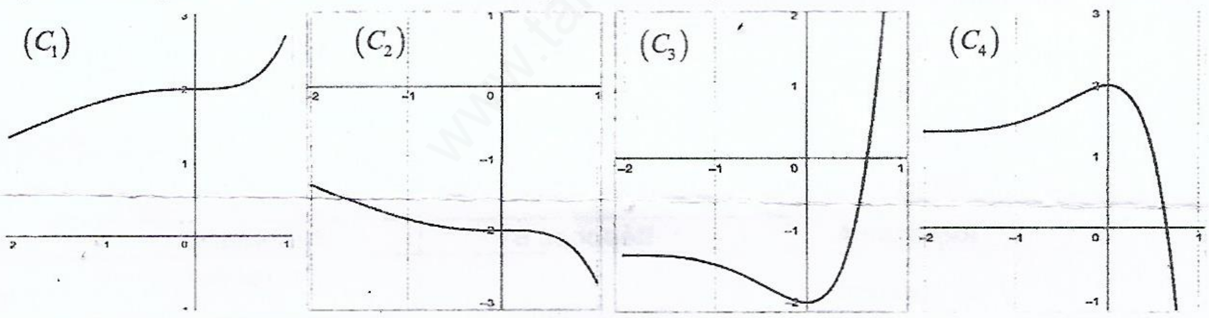
b) Le conjugué de Z est alors :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\bar{Z} = \left(\frac{-i-\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$	$\bar{Z} = \left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)z$	$\bar{Z} = \left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right)z$	$\bar{Z} = \left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$

4. La courbe ci – dessous est la courbe (C) représentative d'une fonction f dérivable sur I



a) Laquelle des quatre courbes ci – dessous représente une primitive F de la fonction f sur I :



Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
(C_3)	(C_4)	(C_2)	(C_1)

b) Laquelle des affirmations suivantes est correcte

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$F'(0)=1$	$f'(0)=0$	$F'(0)=-2$	$f'(0)=2$

5. On désigne par A et B deux évènements d'un univers muni d'une probabilité p.

On sait que $p(A\cup B)=\frac{7}{8}$ et $p(\overline{B})=\frac{5}{8}$.

a) Si A et B sont indépendant alors la probabilité de l'évènement A est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	Aucune des réponses n'est juste

b) Si A et B sont incompatible alors la probabilité de l'évènement A est égale à

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	Aucune des réponses n'est juste

EXERCICE 2 : Arithmétique – Congruences et critères de divisibilité…/**3pts**

1. On considère l'équation (E): $5x+3y=16$ où x et y sont des entiers naturels.
   a) Justifier que l'équation $5x+3y=1$ admet au moins une solution.
   b) Déterminer une solution de l'équation $5x+3y=1$, en déduire une solution particulière de (E).
   c) Résoudre alors dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E).
2. ELLA Paul est un candidat de terminale C, il a passé les épreuves du second tour en mathématiques (coefficient 5) et en philosophie (coefficient 3). Il a obtenu la note de 08/20 dans les deux disciplines au premier tour. Pour être déclaré admis au second tour (avoir 10/20), il lui faut rattraper 16 points.
   On désigne par $8+x$ sa note à l'oral de mathématiques et $8+y$ celle obtenue à l'oral de philosophie où x et y sont des entiers naturels. A l'aide de la question précédente, déterminer toutes les notes possibles d'ELLA Paul en mathématiques et en philosophie pour qu'il obtienne exactement 10/20 au second tour.

EXERCICE 3 : Similitudes directes du plan…/**3pts**

On considère dans le plan orienté un triangle rectangle ABC tel que : $AB=2AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On désigne par I le milieu de $[AB]$ et J un point tel que A soit milieu de $[CJ]$

1. Faire une figure soignée que l'on complétera au fur et à mesure.
2. a) Justifier qu'il existe une unique similitude directe S du plan qui transforme I en C et A en J.
   b) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S
3. Considérons les cercles (C_1) et (C_2) respectivement de diamètre $[IC]$ et $[AJ]$
   a) Montrer que le centre Ω de S appartient à $(C_1)\cap(C_2)$
   b) Déterminer et construire alors Ω.
4. La droite (Δ_1) est la tangente à (C_1) au point C, la droite (Δ_2) est la tangente à (C_2) au point J.
   a) Démontrer que $S(C)=K$ où K est le point d'intersection de (Δ_1) et (Δ_2)
   b) Place le point L, image de B par S, on expliquera la construction.

Exercice 4: Etude d'une suite numérique…./ **5pts**

L'objectif de cet exercice est d'étudier une suite (x_n) dont les termes sont définis comme les solutions d'équations $f_n(x)=0$, où f_n est une famille de fonctions définies pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x)=x-\ln x$.

1. Justifier que la fonction g est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
2. a) En utilisant g(1), justifier clairement le signe de g(x) pour x élément de $[1\,;+\infty[$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n\geq 1$, $\sqrt{n}\geq \ln\sqrt{n}$.

Partie B :

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]1;\ +\infty[$ par $f_n(x)=n(x-1)+\ln(x-1)$. On note f'_n la fonction dérivée de la fonction f_n.

1. a) Calculer $f'_n(x)$ puis justifier que f_n est strictement croissante sur $]1;\ +\infty[$
   b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et en 1.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]1;\ +\infty[$

2. Justifier que $x_0 = 2$.
3. Soit n un entier naturel.
   a) Montrer que pour tout x appartenant à]1 ;+∞[on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - 1$, puis que : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$
   b) En déduire que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
   c) En utilisant le sens de variation de f_{n+1}, montrer que la suite (x_n) est décroissante. En déduire que la suite (x_n) converge.
4. a) En utilisant la question 2-b°) de la **partie** A, démontrer que pour tout entier naturel n≥1, $f_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n≥1, $1 < x_n \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   c) Déterminer la limite de la suite (x_n) .

Exercice 5 : Intégrale et suites numériques…/**4pts**

1. Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x^2 e^{1-x}$.
   On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.
   a) Déterminer les limites de f en -∞ et en +∞ ; En déduire une conséquence graphique pour la courbe (C) dans le cas de la limite de f en +∞ .
   b) Justifier que f est dérivable sur ℝ et déterminer sa fonction dérivée f'.
   c) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C).
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.
   a) A l'aide d'une intégration par partie, établir une relation entre I_{n+1} et I_n.
   b) Calculer I_1 et I_2.
   c) Donner une interprétation graphique de I_2. On fera apparaitre sur le graphique de la **question1c**.
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
   b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers +∞.

$f(2) = 4e^{1-2}$
$= 4e^{-1}$