EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
(Calculatrice non autorisée)

Coefficient : 5
Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 (4 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos \frac{x}{3} - 5 \sin \frac{x}{3}$.

- 1) a) Calculer, pour x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x)$ et $f''(x)$ où f' et f'' sont respectivement les dérivées première et seconde de f . (0,5 pt + 0,5 pt)
b) En déduire $f''(x)$ en fonction de $f(x)$. (0,5 pt)
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E): $9y'' + y = 0$. (0,5 pt)
- 3) On appelle h la fonction solution particulière de (E) dont la représentation graphique (C) dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point de coordonnées $(\frac{\pi}{2}; 0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
 - a) Donner $h(\frac{\pi}{2})$ et $h'(\frac{\pi}{2})$. (0,5 pt)
 - b) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = -\sqrt{3} \cos \frac{x}{3} + 3 \sin \frac{x}{3}$. (0,75 pt)
 - c) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = a \cos(\frac{x}{3} - b)$ avec $a > 0$ et $0 < b < \pi$. (0,75 pt)

EXERCICE N°2 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(4; 0; 1)$, $B(1; 1; 5)$ et $C(0; 4; 1)$

- 1) a) Calculer les coordonnées du point D tel que $\overline{AD} = \overline{BC}$. (0,5 pt)
b) Montrer que les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires. (0,75 pt)
c) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $ABCD$? Justifier. (0,5 pt)
- 2) Calculer les coordonnées de $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$. (0,75 pt)
- 3) a) Calculer la distance du point O au plan (ABC) . (0,5 pt)
b) Les points O, A, B et C sont-ils coplanaires? Justifier. (0,25 pt)
- 4) a) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère $ABCD$. (0,25 pt)

b) En déduire le volume V de la pyramide de sommet O et de base le quadrilatère $ABCD$. (0,5 pt)

PROBLEME (12 points)

Partie A (1,25 points)

Soit h la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $h(x) = x^2 + 2x + 3 - 2 \ln(x + 1)$.

1. Etudier le sens de variation de h sur $]-1; +\infty[$. (0,75 pt)
2. Calculer $h(0)$ puis montrer que $h(x) > 0$ sur $]-1; +\infty[$. (0,5 pt)

Partie B (7,75 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ x + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \in [0; +\infty[\end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité : 2cm.

- 1) Etudier la continuité de f en 0. (0,5 pt)
- 2) a) Montrer que :
 - $\forall x \in]-\infty; 0[, \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x}}$
 - $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{f(x)}{x} = 1 + \left(\frac{2}{x+1}\right) \frac{\ln(x+1)}{x}$. (0,5 pt)
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis en déduire la dérivabilité de f en 0. (0,75 pt)
- c) Donner une interprétation graphique des résultats des limites précédemment calculées. (0,5 pt)
- 3) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu en $-\infty$. (0,75 pt)
- 4) a) Montrer que $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-x} + 2x - 1}{2\sqrt{x^2-x}}$, f' étant la dérivée de f . (0,25 pt)
- b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$ et montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$.
- c) En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$. (0,75 pt)
- 5) a) Montrer que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$. (0,5 pt)
- b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) sur $]0; +\infty[$. (0,5 pt)
- 6) Sur $]0; +\infty[$, (C) admet une tangente (T) parallèle à (D) en un point A . Déterminer les coordonnées du point A (0,5 pt)
- 7) Tracer (T) , les asymptotes, les demi-tangentes en 0 et (C) dans le repère. (1,75 pts)

4. d) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. On admettra que $f'(0) < 0$ sur $]-\infty; 0[$.

Partie C (1,5 points)

Soit g la restriction de f sur $]0; +\infty[$.

- 1) Montrer que g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. (0,75 pt)
- 2) On appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction réciproque g^{-1} de g . Construire (Γ) dans le repère précédent. (0,75 pt)

Partie D (1,5 points)

- 1) Montrer que l'intégrale $I = \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \frac{3(\ln 2)^2}{2}$. (0,75 pt)
- 2) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 . (0,75 pt)

On donne :

$$f(-1) \approx 0,4; \quad f(-3) \approx 0,5; \quad \ln 2 \approx 0,7;$$
$$2 + \frac{2\ln 3}{3} \approx 2,8; \quad 4 + \frac{2\ln 5}{5} \approx 4,6.$$