REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

N'NAT

Session : 2019 – 2020
Série : D
Coef. : 4
Durée : 4 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(l'usage de la calculatrice est autorisé)

Exercice 1 : Questions à Choix Multiples. (5 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Une bonne réponse vaut 1 point, une mauvaise réponse fait perdre 0,25 point, l'absence de réponse ne donne droit à aucun point et n'en fait perdre aucun ; si le total des points est négatif, la note à cet exercice est ramenée à zéro.

1) La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln\left(\frac{e^x+2}{e^x+1}\right)$ est égal à :

A	$ln2$	**B**	$+\infty$
C	0	**D**	1

2) Soient E et F deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que $p(E) = 0,3$ et $p(E \cup F) = 0,65$. La probabilité de l'événement F est :

A	0,95	**B**	0,35
C	0,195	**D**	Aucune réponse n'est juste

3) La transformation du plan dont l'écriture complexe $z' = (a^2 + 2)z + 1 + i$ est une translation si et seulement si a est égale à :

A	$1 \text{ ou } -1$	**B**	$1 \text{ ou } i$
C	$i \text{ ou } -i$	**D**	$-1 \text{ ou } -i$

4) On considère la série statistique double suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	7	9	12	14	17	22

Le coefficient de corrélation linéaire de cette série double est :

A	0,987	**B**	−0,987
C	Aucune réponse n'est juste	**D**	0,87

5) L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. (P) est le plan d'équation cartésienne : $-2x+y+5z-1=0$. La distance de (P) au point $H(5;-2;-1)$ est :

A	$\frac{-18}{\sqrt{30}}$;	**B**	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$
C	$\frac{3\sqrt{30}}{5}$	**D**	$\frac{5\sqrt{30}}{3}$

<u>Exercice 2</u> : Similitude et nombres complexes (5 points)

On considère le polynôme P défini dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes z par :

$P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(-2+3i)z+5+i$

1°) a°) Calculer $(4-3i)^2$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+(2-i)z-1+5i = 0$

b°) Vérifier que le nombre i est une racine du polynôme P.

c°) Déterminer les nombres complexes u et v tels que : $P(z)=(z-i)(z^2+uz+v)$

d°) On suppose pour la suite de l'exercice que $u=2-i$ et $v=-1+5i$; en déduire dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation $P(z)=0$.

2°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1-i$; $z_B=i$ et $z_C=-3+2i$. On désigne par S la similitude directe plane telle que S(A)=B et S(B)=C.

a°) Montrer que le nombre complexe $a=\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A}$ est égal à $1+i$ et préciser le module et un argument du nombre complexe a.

b°) En donnant une interprétation géométrique du module et d'un argument du nombre complexe a, préciser le rapport et l'angle de la similitude S.

c°) Montrer que l'écriture complexe de S est : $z'=(1+i)z-2+i$. En déduire l'affixe z_Ω du centre Ω de S.

d°) Déterminer l'affixe z_D du point D image du point C par S.

e°) Placer les points A, B, C, Ω et D.

<u>Problème</u> : Etude d'une suite numérique (10 points)

L'objectif de cet exercice est de démontrer que l'équation (E) : $(x-1)e^{x-1}=1$ admet une solution unique dans l'ensemble des nombres réels, et d'approcher cette solution par la construction d'une suite.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x-1-e^{1-x}$

1°) Démontrer que x est solution de l'équation (E) si, et seulement si, x est solution de l'équation g(x)=0.

2°) a°) Justifier que pour tout réel x on a : $g(x) = (xe^{x-1} - e^{x-1} - 1)e^{1-x}$

b°) En déduire le calcul de la limite de g en $-\infty$ (On rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$).

c°) Calculer la limite de g en $+\infty$.

d°) Calculer g'(x) et justifier que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

e°) Etablir le tableau de variation de g et en déduire que l'équation (E) possède une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

f°) Justifier que : $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2$.

g°) Montrer clairement que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-\infty; \alpha[$, g(x) est négative.

Partie B :

On note f la fonction définie sur [1 ; 2] par $f(x) = 1 + \frac{x}{1+e^{x-1}}$

1°) Démontrer que l'équation f(x)=x est équivalente à l'équation g(x)=0.

2°) En déduire que α est l'unique réel vérifiant l'égalité $f(\alpha) = \alpha$.

3°) a°) Calculer $f'(x)$ et vérifier que : $f'(x) = \frac{-g(x)e^{x-1}}{(1+e^{x-1})^2}$ pour tout x de [1 ; 2].

b°) En déduire que la fonction f est croissante sur $[1 ; \alpha]$.

4°) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par :

$u_{n+1} = f(u_n)$.

a°) Calculer u_1.

b°) Montrer à l'aide d'une démonstration par récurrence que pour tout entier naturel n≥0, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

c°) En déduire que la suite(u_n) est convergente vers une limite notée l.

d°) On admet que l vérifie l'égalité $f(l) = l$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Partie C :

On désigne par $(\mathcal{L})$ la courbe représentative de la fonction g définie dans la **partie A**, dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. En utilisant les résultats de la **partie A**, montrer que l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{L})$, l'axe des abscisses, les droites d'équations x= α et x=2 est : $1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{2}\alpha^2$.