

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT
PRESCOLAIRE, PRIMAIRE,
SECONDAIRE ET DE L'ALPHABETISATION

CABINET

DIRECTION DES EXAMENS ET CONCOURS

SERVICE DU BACCALAUREAT

REPUBLIQUE DU CONGO
Unité*Travail*Progrès



BACCALAUREAT SESSION DE : JUIN 2022
EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES
SÉRIE : C
DURÉE : 4 HEURES
COEFFICIENT : 05
DOCUMENTS AUTORISÉS : calculatrice non programmable

EXERCICE 1: (4 points)

On considère l'ensemble (S) des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que : $\begin{cases} x = 12 + 3t \\ y = 37 - 7t \end{cases}$ où t est entier relatif.

- 1) Vérifier que, pour tout couple $(x; y)$ de (S) , on a : $7x + 3y = 195$ (E) (0.5 point)
- 2) Soit $d = \text{PGCD}(x, y)$. Il existe alors deux entiers x' et y' premiers entre eux, tels que $x = dx'$ et $y = dy'$.
Justifier que d divise 195. (0.5 point)
- 3) Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 195. (1 point)
- 4) Trouver l'ensemble des couples $(x; y)$ de (S) tels que $0 \leq y \leq 37$. (1.5 point)
- 5) En déduire le couple $(x_0; y_0)$ pour lequel $d = 3$. (0.5 point)

EXERCICE 2: (8 points)

Dans le plan orienté (P) , on considère un triangle ABC équilatéral direct, de centre de gravité G . I est le symétrique de C par rapport à O , où O est le milieu de $[AB]$. J est le symétrique de G par rapport à O et K le milieu de $[BC]$. Pour la figure, on prendra $[BC]$ horizontalement tels que $BC = 5 \text{ cm}$.

- 1) Faire une figure, que l'on complétera au fur et à mesure. (1 point)
- 2) Construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MC}) = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$.
(0.5 point)
- 3) Soit (C) le cercle de diamètre $[IG]$. Montrer que (C) est l'ensemble des points M du plan tels que $MC = 2MO$. (0.5 point)
- 4) Soit h l'application ponctuelle qui à tout point M du plan associe le point M' tels que :
 $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
 - a) Démontrer que $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$. (0.5 point)
 - b) En déduire la nature de l'application h . (0.5 point)



- 5) Soit $f = r(C; \frac{\pi}{3}) \circ h(G; -2)$.
- Déterminer $f(0)$. (0.5 point)
 - Montrer que f est une similitude plane directe d'angle de mesure $\frac{-2\pi}{3}$ et dont on précisera le rapport. (1 point)
 - Déduire des questions 2) et 3) une construction du centre Ω de f . (0.5 point)
- 6) Soit D le point du plan tel que $ABCD$ soit un losange. On considère la transformation du plan (P) telle que $g = S_{(BC)} \circ t_{\vec{CA}}$.
- Montrer que g est une symétrie glissée. (0.5 point)
 - Sachant que $g(C) = D$ et $g(D) = B$ et utilisant $(g \circ g)(C)$, déterminer le vecteur $\vec{u}$ de g puis déduire son axe (Δ) . (1 point)
- 7) La parallèle à la droite (BC) passant par J coupe la médiatrice du segment $[CJ]$ en un point M_0 . Soit (p) la parabole de foyer C et de directrice la droite (BJ) .
- Montrer que M_0 est un point de (p) . (0.5 point)
 - Soit N le symétrique de K par rapport à C et (Δ') la droite passant par N et perpendiculaire à (BC) . Construire les points M_1 et M_2 de (p) situés sur (Δ') . On désignera par M_1 celui situé dans le demi-plan de frontière (BC) contenant le point A . (0.5 point)
 - Achever la construction de (p) . (0.5 point)

EXERCICE 3 : (5 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(1-x) - 1$ et la fonction f telle que

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

On admet que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

1)

- Montrer que pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$. (0.5 point)
- Sachant que $g(x)$ est négative sur $\mathbb{R}$, déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (0.5 point)

2) Soit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$.

- Montrer que, pour tout réel x , $h'(x) < 0$. (0.5 point)
- En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2; 2,5[$. (0.5 point)

3) Montrer que, pour tout $x \in]2; 2,5[$, $-0,5 \leq f'(x) < 0$ sachant que : $-g(x) \leq 20$ et

$$\frac{1}{(e^x - 1)^2} \leq \frac{1}{40}. \quad (0.5 \text{ point})$$

4) Soit la suite (u_n) , n un entier naturel, définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- a) Montrer que si $u_n \in [2; 2,5]$, $u_{n+1} \in [2; 2,5]$. (0.5 point)
- b) En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$, montrer que
- $$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|. \quad (0.5 \text{ point})$$
- c) Montrer que, pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. (0.5 point)
- d) En déduire que la suite (u_n) converge vers α . (0.5 point)
- e) En déduire un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$. (0.5 point)

EXERCICE 4 : (3 points)

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente(en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Prix de vente en milliers de francs (x_i)	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels (y_i)	180	160	150	130	100	90	80	70

On a effectué un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés et on a obtenu la droite de régression (D) de y en x telle que : (D) $y = -13,83x + 299,83$

- On donne : $\bar{x} = 13$ et $\bar{y} = 120$
Calculer la variance de x En déduire la covariance de x et y . (1 point)
- On veut déterminer l'équation de la droite de régression de x en y . On donne (D') : $x = a'y + b'$ et $V(y) = 1450$. Déterminer a' puis en déduire la valeur de b' . (1 point)
- En utilisant l'équation de la droite (D') de x en y , estimer le prix de vente si le nombre d'acheteurs potentiels est de 250. (0.5 point)
- Déterminer l'inertie par rapport au point moyen G . (0.5 point)