EXAMEN DU BACCALAUREAT

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

SESSION NORMALE 2024

SERIES F1 - F2 - F3 - F4

BURKINA FASO

Unité – Progrès – Justice

1^{er} tour

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
(Calculatrice non autorisée)

Coefficient : 5
Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 (4 points)

1) a) Résoudre l'équation différentielle $(E): y' + 2y = 0$. (0,5 pt)
   b) Déterminer la solution f de (E) telle que : $f(0) = 1$. (0,5 pt)
2) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 1]$. (0,5 pt)
3) Déterminer en fonction de n la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n\,; n+1]$, $n \in \mathbb{N}$. (0,5 pt)
4) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}$ pour tout entier naturel n.
   a) Calculer U_0 et U_1. (0,5 pt)
   b) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1 pt)
   c) Calculer la somme : $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_9$. (0,5 pt)

EXERCICE N°2 (4 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = -3$; $z_C = -2 - \frac{3}{2}i$. On considère les polynômes p et g tels que : $p(z) = z^3 + \left(5 - \frac{1}{2}i\right)z^2 + \left(9 - \frac{11}{2}i\right)z + 9 - 12i$ et

$$g(z) = z^2 + (3 - 2i)z - 6i$$

1) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe, $(3 + 2i)^2$. (0,25 pt)
2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $g(z) = 0$. (0,75 pt)
3) a) Développer, réduire et ordonner $\left(z + 2 + \frac{3}{2}i\right)g(z)$. (0,5 pt)
   b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $p(z) = 0$. (0,5 pt)
4) a) Placer les points A, B et C dans le repère. (0,75 pt)
   b) Calculer $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}$ puis donner la nature du triangle ABC. (0,5 pt)
5) a) Calculer l'affixe du point D, image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. (0,25 pt)
   b) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $ABCD$? Justifier. (0,5 pt)

PROBLEME (12 points)

Partie A (2 points)

Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1) Etudier le sens de variation de g. (1,25 pt)
2) Calculer $g(1)$ puis en déduire que, pour $x \in [1;+\infty[$, $g(x) > 0$. (0,75 pt)

Partie B (8,25 points)

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 - e^{x-1} & si\ x \in]-\infty; 1[\\ f(x) = \frac{x^2-2x+\ln x}{x} & si\ x \in [1;+\infty[\end{cases}$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1) a) Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
   b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f. (0,75 pt)
2) Etudier la continuité de f en 1. (0,5 pt)
3) a) Montrer que :
   - $\forall x \in]-\infty; 1[, \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - \frac{e^{x-1}-1}{x-1}$ (0,25 pt)
   - $\forall x \in]1;+\infty[, \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x-1}$ (0,25 pt)

   En déduire la dérivabilité de f en 1. (0,75 pt)

   b) Donner une interprétation graphique des résultats de :
   $\lim\limits_{x\to 1^-} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]$ (0,5 pt)
4) a) Montrer que la droite (D_1) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$. (0,25 pt)
   b) Montrer que la droite (D_2) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$. (0,25 pt)
5) a) Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty; 1]$. (0,5 pt)
   b) Calculer $f'(x)$ sur $]1;+\infty[$ puis montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. (0,5 pt)

   En déduire le sens de variation de f. (0,25 pt)

   c) Dresser le tableau de variation de f. (0,5 pt)
6) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $1,6 < \alpha < 1,7$. (0,5 pt)
   b) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. (0,25 pt)
7) Tracer (D_1), (D_2), les demi-tangentes et $(\mathcal{C})$ dans le repère. (1,5 pts)
8) Montrer que $\ln \alpha = \alpha(2 - \alpha)$. (0,25 pt)

Partie C (1,75 points)

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

1) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en unité d'aire. (0,5 pt)
2) Montrer que : $\mathcal{A} = \frac{\alpha^4}{2} - 2\alpha^3 + \frac{5}{2}\alpha^2 - 2\alpha + \frac{3}{2}$. (0,25 pt)
3) On pose $I = \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)dx$, $J = \int_1^2 (x-2)\frac{\ln x}{x}dx$ et $K = \int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$ et on admet que : $J = -\frac{\ln^2 2}{2} + 2\ln 2 - 1$ et $K = -\frac{\ln^2 2}{2} - \ln 2 + 1$

   a) Calculer I. (0,5 pt)

   b) Soit V le volume engendré par la rotation complète autour de l'axe des abscisses de la portion du plan comprise entre les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
   Calculer V en unité de volume. (0,5 pt)

   la Courbe $(\mathcal{C}_f)$

On donne : $\frac{\ln 2}{2} \simeq 0{,}35$; $e \simeq 2{,}72$; $e^{-1} \simeq 0{,}36$; $e^{-2} \simeq 0{,}13$;

$f(1{,}6) \simeq -0{,}11$ et $f(1{,}7) \simeq 0{,}01$

EXAMEN DU BACCALAUREAT Série : F

Proposition de corrigé du sujet n°1

Exercice 1 :

1) a) Résolution de (E) :

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de (E) ;

$y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$ (0,5 pt)

$\Leftrightarrow \quad h(x) = ke^{-2x}$, k constante réelle.

b) Détermination de l'expression de f :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = h(x)$.

$f(0) = 1 \Rightarrow ke^{0} = 1$ (0,25 pt)

$\Rightarrow k = 1$ d'où $f(x) = e^{-2x}$. (0,25 pt)

2) Valeur moyenne de f $[0;1]$

(0,25 pt) (0,25 pt)

$$\frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{1-0} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}$$

La valeur moyenne de f sur $[0;1]$ est $\frac{1}{2}(1-e^{-2})$. 0,25 formul 0,25 RF

3) Valeur moyenne de f sur $[n;(n+1)]$:

$$V_n = \frac{\int_n^{n+1} f(x)\,dx}{n+1-n} = \int_n^{n+1} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_n^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$V_n = -\frac{1}{2}e^{-2(n+1)} + \frac{1}{2}e^{-2n} \text{ ou } V_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}.$$

0,25 F 0,25 RF

(0,5 pt)

4) a) Calcul de U_0 et U_1 :

$$U_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n} \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$U_0 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{0} \Rightarrow U_0 = \frac{1}{2}(1-e^{-2}).$$ 0,25 pt

$$U_1 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2\times 1} \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2}.$$ 0,25 pt

b) (U_n) suite géométrique :

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2(n+1)} \Leftrightarrow$$ 0,25

0,5 pt

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n} \times e^{-2} \Leftrightarrow$$ 0,25

$U_{n+1} = e^{-2} U_n$ donc, par définition, (U_n) est une suite géométrique de raison e^{-2} et de premier terme $U_0 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})$. 0,25 pt 0,25 pt

c) Calcul de S

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_9 \Rightarrow$$

$$S = U_0 \frac{1-q^{10}}{1-q} \Rightarrow \quad (q = e^{-2})$$ 0,25

$$S = \frac{1}{2}(1-e^{-2}) \frac{1-(e^{-2})^{10}}{1-e^{-2}} \Rightarrow$$ 0,25 pt

$$S = \frac{1}{2}(1-e^{-20})$$ 0,25 pt

0,5

EXERCICE 2 : (4 points)

$z_A = 2i$, $z_B = -3$, $z_C = -2 - \frac{3}{2}i$, $g(z) = z^2 + (3-2i)z - 6i$,

$p(z) = z^3 + (5 - \frac{1}{2}i)z^2 + (9 - \frac{11}{2}i)z + 9 - 12i$

1) Ecriture sous forme algébrique de $(3+2i)^2$:

$(3+2i)^2 = (3)^2 + (2i)^2 + 12i \Rightarrow$

$(3+2i)^2 = 9 - 4 + 12i \Rightarrow$

$(3+2i)^2 = 5 + 12i$ 0,25 pt

2) Résolution de $g(z) = 0$:

$g(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + (3-2i)z - 6i = 0$ 0,25 pt

$\Delta = (3-2i)^2 + 24i \Rightarrow \Delta = 5+12i \Rightarrow \Delta = (3+2i)^2$

On trouve :

$\begin{cases} z_1 = \frac{-3+2i-3-2i}{2} \\ z_2 = \frac{-3+2i+3+2i}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -3 \\ z_2 = 2i \end{cases}$ 0,25 pt d'où $S_{\mathbb{C}} = \{-3 ; 2i\}$

0,25 pt

3) a) Développement de $(z+2+\frac{3}{2}i)g(z)$:

$\forall z \in \mathbb{C}$, $(z+2+\frac{3}{2}i)g(z) = (z+2+\frac{3}{2}i)(z^2 + (3-2i)z - 6i) \Leftrightarrow$

$= z^3 + (3-2i)z^2 - 6iz + 2z^2 + (6-4i)z - 12i +$

$+ \frac{3}{2}iz^2 + (\frac{9}{2}i + 3)z + 9 \Leftrightarrow$ 0,25

$(z+2+\frac{3}{2}i)g(z) = z^3 + (3 - 2i + 2 + \frac{3}{2}i)z^2 + (6 - 4i + \frac{9}{2}i + 3 - 6i)z +$

$+ 9 - 12i$. $\Leftrightarrow$

$(z+2+\frac{3}{2}i)g(z) = z^3 + (5 - \frac{1}{2}i)z^2 + (9 - \frac{11}{2}i)z + 9 - 12i \Leftrightarrow$ 0,25

0,5 pt

b) Solution de l'équation $p(z)=0$

D'après la question précédente, on a : $(z+2+\frac{3}{2}i)g(z)=p(z)$

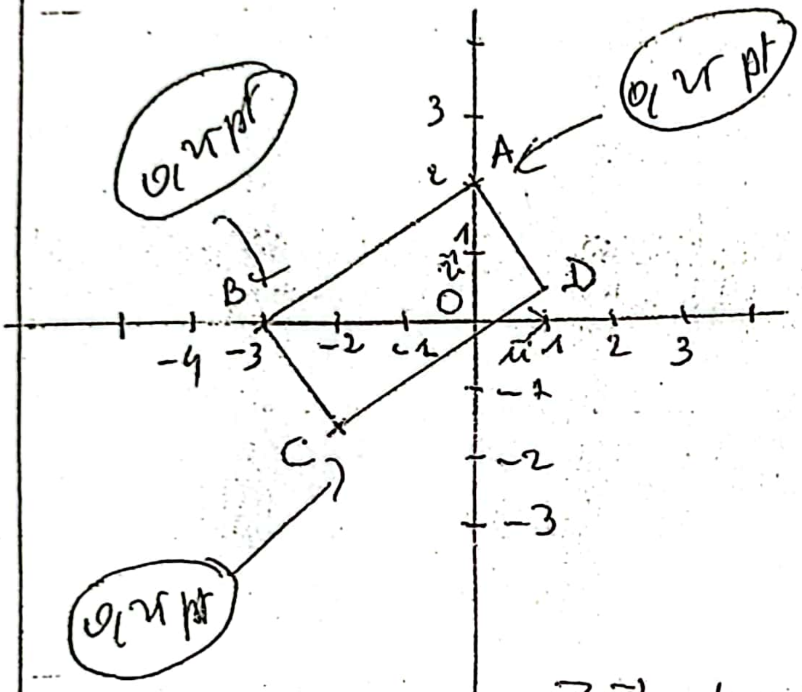
donc :

$$p(z)=0 \iff (z+2+\tfrac{3}{2}i)g(z)=0$$
$$\iff z+2+\tfrac{3}{2}i=0 \text{ ou } g(z)=0$$
$$\iff z=-2-\tfrac{3}{2}i \text{ ou } z=-3 \text{ ou } z=2i$$

0,25 0,25 0,5 pt

$S_{\mathbb{C}}=\{-2-\frac{3}{2}i\ ;\ -3\ ;\ 2i\}$.

4) a) Construction



b) Calcul de $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}$ et nature de ABC :

On a : $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}=\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}=\frac{-3-2i}{-3+2+\frac{3}{2}i}$ $\Rightarrow$

$=\frac{-3-2i}{-1+\frac{3}{2}i}$ $\Rightarrow$

$=\frac{3+2i}{1-\frac{3}{2}i}$ $\Rightarrow$

$=\frac{6+4i}{2-3i}$ $\Rightarrow$

4/14

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \frac{6+4i}{2-3i} \Rightarrow$$

$$= \frac{2i(2-3i)}{2-3i} \Rightarrow \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = 2i \quad 0{,}25\text{pt}$$

$2i \in i\mathbb{R}^*$ donc le triangle ABC est rectangle en B. 0,25pt

5) a) Calcul de l'affixe du point D :

$$t_{\overrightarrow{BC}}(A) = D \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BC}}$$

$$\iff z_D - z_A = z_{\overrightarrow{BC}}$$

$$\iff z_D = z_A + z_{\overrightarrow{BC}}$$

$$\iff z_D = 2i + 1 - \frac{3}{2}i$$

$$\Rightarrow z_D = 1 + \frac{1}{2}i \quad 0{,}25\text{pt}$$

b) Nature exacte de ABCD

On sait que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc ABCD est un parallélogramme ; de plus ABC est un triangle rectangle en B 0,25

d'où ABCD est un rectangle. 0,5pt

0,25

Problème : (12 points)

Partie A : (2 points)

$g(x) = x^2+1 - \ln x$ sur $[1;+\infty[$

1) Sens de variation de g :

g est dérivable sur $[1;+\infty[$. ~~0,25 pt~~

$\forall x \in [1;+\infty[$; $g'(x) = 2x - \frac{1}{x}$ ou $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$ 0,25 pt

$\forall x \in [1;+\infty[$, $2x^2-1>0$ et $x>0$ donc $\frac{2x^2-1}{x} > 0$ d'où

$g'(x) > 0$. Par conséquent g est strictement croissante

sur $[1;+\infty[$. 0,25 pt

0,5

2) Calcul de g(1) et signe de g(x) :

On a $g(1) = 1^2+1 - \ln 1 = 2$, $g(1) = 2$. 0,25 pt

g croît sur $[1;+\infty[$ et de plus $g(1) = 2$ donc pour

$x \in [1;+\infty[$, $g(x) > 0$. 0,5 pt

Affirmation simple si il justifie 0,5

Partie B : (8,5 points)

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 - e^{x-1} & \text{si } x \in]-\infty;1[\\ f(x) = \dfrac{x^2 - x + \ln x}{x} & \text{si } x \in [1;+\infty[\end{cases}$$

1) a) Détermination de Df :

0,25 pt

$Df = \{x \in \mathbb{R} / x \in]-\infty;1[\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x>0 \text{ et } x \neq 0 \text{ et } x \in [1;+\infty[\}$

$Df =]-\infty;1[\cup ( ]0;+\infty[\cap ( ]-\infty,0[\cup]0;+\infty[ ) \cap [1,+\infty[ )$ $\Rightarrow$

$Df =]-\infty;1[\cup [1;+\infty[$ $\Rightarrow$

0,25 pt

$Df = \mathbb{R}$.

0,5

6/15

b) Calcul des limites aux bornes de D_f :

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x-1-e^{x-1}) = -\infty$ car

quand $x \to -\infty$ $\begin{cases} x-1 \to -\infty \\ e^{x-1} \to 0 \end{cases}$ 0,25 pt

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-2x+\ln x}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(x-2+\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ 0,25

car quand $x \to +\infty$ $\begin{cases} \frac{\ln x}{x} \to 0 \\ x-2 \to +\infty \end{cases}$ 0,25 pt Justif

2) Continuité de f en 1 :

$f(1) = \frac{1^2-2+\ln 1}{1} = -1$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(x-1-e^{x-1}) = 1-1-e^{1-1} = -1$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x^2-2x+\ln x}{x}\right) = \frac{1^2-2+\ln 1}{1} = -1$ 0,25 pt

On a $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$ donc la fonction f est continue en 1. 0,25 pt

3) a) Preuve de résultats :

• $\forall x \in]-\infty, 1[$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x-1-e^{x-1}+1}{x-1}$ $\Leftrightarrow$

$= \frac{x-1}{x-1} - \frac{e^{x-1}-1}{x-1}$ $\Leftrightarrow$

$= 1 - \frac{e^{x-1}-1}{x-1}$

$\forall x \in]-\infty, 1[$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - \frac{e^{x-1}-1}{x-1}$ 0,25 pt

7/14

* $\forall x \in]1;+\infty[$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\dfrac{x-2+\ln x+1}{x}}{x-1}$ $\Leftrightarrow$

$= \dfrac{x-1}{x-1} + \dfrac{\ln x}{x(x-1)}$ $\Leftrightarrow$

$= 1 + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x-1} = 1 + \dfrac{\ln x}{x(x-1)}$

Tout autre raisonnement juste

$\forall x \in]1;+\infty[$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x-1}$. 0,25 pt

* $\lim\limits_{x\to 1^-} \left[\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1^-} \left[1 - \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}\right]$

$= 1-1$

$= 0$ car $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \left(\dfrac{e^{X}-1}{X}\right) = 1$ 0,25 pt

$= f'_g(1)$

* $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1^+} \left[1 + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x-1}\right]$

$= 1+1$

$= 2$ car quand $x \to 1^+$ $\begin{cases} \dfrac{1}{x} \to 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} \to 1 \end{cases}$ 0,25 pt

$= f'_d(1)$

On a $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ donc f n'est pas dérivable en 1

0,25 pt

b) Interprétation graphique de $\lim \left[\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]$ et $\lim \left[\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]$

* $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$ donc la courbe (C) admet, à gauche de 1 0,25 pt

une demi-tangente horizontale d'équation $y = -1$.

* $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$ donc la courbe (C) admet à droite de 1

une demi-tangente d'équation : $y = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$

0,25 pt

obligé mettre les équations

sans la nature on donne 0,25 en tout

4) a) (D_1) asymptote oblique à (C) en $-\infty$:

$\forall x \in]-\infty;1[$, $f(x) = x-1-e^{x-1} \Leftrightarrow$

$f(x)-(x-1) = -e^{x-1} \Rightarrow$ 0,25 pt

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}(-e^{x-1}) = 0$ donc la droite (D_1) d'équation $y = x-1$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

b) (D_2) asymptote oblique à (C) en $+\infty$:

$\forall x \in]1;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x^2-2x+\ln x}{x} \Leftrightarrow$

$f(x) = x-2+\dfrac{\ln x}{x} \Leftrightarrow$

$f(x)-(x-2) = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow$ 0,25 pt

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$ donc la droite (D_2) d'équation $y = x-2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

5) a) Sens de variation de f sur $]-\infty;1[$:

f est dérivable sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

$\forall x \in]-\infty;1[$, on a :

$f'(x) = 1-e^{x-1}$, 0,25 pt

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-e^{x-1} > 0$

$\Leftrightarrow e^{x-1} < 1$

$\Leftrightarrow x-1 < 0$

$\Leftrightarrow x < 1$

$f'(x)$ $\Leftrightarrow x \in]-\infty;1[$.

$\forall x \in]-\infty ; 1[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; 1[$. 0,25 pt

b) Calcul de $f'(x)$ et sens de variation de f sur $]1 ; +\infty[$:

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} \iff$$ 0,25

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} \iff$$ 0,25 pt

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$ car $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a même signe que $g(x)$. Or, pour $x \in]1 ; +\infty[$ $g(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$. 0,25 pt

c) Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$			$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0,25 0,25 0,5 pt

6) a) $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1,5 ; 1,7[$

f est continue car dérivable et strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$, Donc elle réalise une bijection de $]1 ; +\infty[$ vers $f(]1 ; +\infty[) =]-1 ; +\infty[$ et $0 \in]-1 ; +\infty[$ d'où l'équation $f(x) = 0$ une unique solution α, de plus on a ;

0,25 pt 10/14

$f(1{,}6) = 1{,}6 - 2 + \frac{\ln 1{,}6}{1{,}6} = -0{,}4 + 0{,}29 = -0{,}11$

$f(1{,}7) = 1{,}7 - 2 + \frac{\ln 1{,}7}{1{,}7} = -0{,}3 + 0{,}31 = 0{,}01$

On a : $f(1{,}6) \times f(1{,}7) < 0$ donc $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$ 0,25 pt

b) Signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x / Comme f ↗ sur $]-\infty ; +\infty[$ et $f(\alpha) = 0$

7) Voir annexe

$\forall x \in]-\infty ; \alpha[$ $f(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$ $f(x) > 0$ 0,25

Partie B :

8) Egalité de $\ln\alpha = \alpha(2-\alpha)$.

On sait que $f(\alpha) = 0$.

$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha - 2 + \frac{\ln\alpha}{\alpha} = 0$

$\Rightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha} = 2 - \alpha$

$\Rightarrow \ln\alpha = \alpha(2-\alpha)$ 0,25 pt

Partie C :

1) Calcul de l'aire A :

$A = \int_1^\alpha \cancel{-} f(x)dx \quad (UA)$ 0,25

$A = -\int_1^\alpha \left(x - 2 + \frac{\ln x}{x}\right)dx \quad \cancel{\times} (UA)$

$A = -\left[\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^\alpha \cancel{\times} \quad (UA)$

$A = -\left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + \frac{\ln^2\alpha}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + 0\right) \cancel{\times} (UA)$

$A = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + \frac{\ln^2\alpha}{2} + \frac{3}{2}\right) \times (UA)$ 0,5 pt

0,25

2) Expression de A en fonction de α

$A = \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + \frac{\ln^2\alpha}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$A = \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + \frac{\alpha^2(2-\alpha)^2}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$A = \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + \frac{1}{2}[\alpha^2(4-4\alpha+\alpha^2)] + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$A = \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha^2 - 2\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^4 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$A = \frac{1}{2}\alpha^4 - 2\alpha^3 + \frac{5}{2}\alpha^2 - 2\alpha + \frac{3}{2}$ (uA)

0,25 pt

3) a) Calcul de I

$I = \int_1^2 (x^2-4x+4)\,dx \Rightarrow$

$I = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right]_1^2 \Rightarrow$ 0,25

$I = \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right) \Rightarrow$

$I = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 2 \Rightarrow$

$I = \frac{8-7}{3} \Rightarrow$

$I = \frac{1}{3}$ 0,25

0,5 pt

b) Calcul de V :

$V = \pi\int_1^2 [f(x)]^2\,dx$ (uv) 0,25

$V = \pi\int_1^2 \left(x-2+\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx \Rightarrow$

$V = \pi\int_1^2 \left[(x-2)^2 + 2(x-2)\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{x^2}\right] dx \Rightarrow$

12/14

$$V = \pi\left[\int_1^2 (x^2-4x+4)\,dx + 2\int_1^2 (x-2)\frac{\ln x}{x}\,dx + \int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx\right] \Rightarrow$$

$$V = \pi\left[\ I + 2J + K\right] \Rightarrow$$

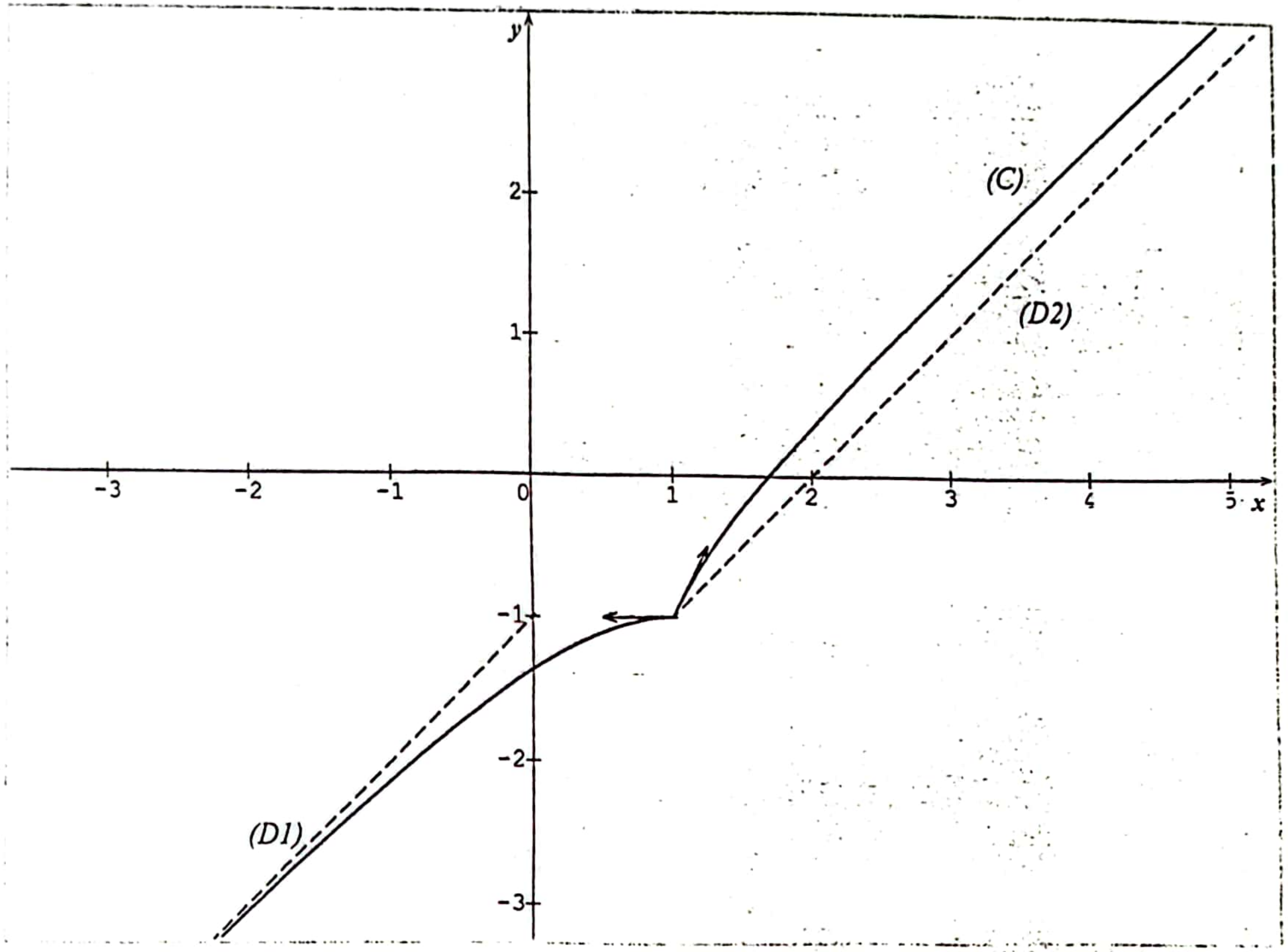
$$V = \pi\left[\frac{1}{3} - \ln^2 2 + 4\ln 2 - 2 - \frac{\ln^2 2}{2} - \ln 2 + 1\right] \Rightarrow$$

$$V = \pi\left[-\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\ln^2 2 + 3\ln 2\right] \cancel{\Rightarrow} (UV)$$

$$V = \frac{\pi}{6}\left(18\ln 2 - 9\ln^2 2 - 4\right) \times (UV)$$

~~0,5pt~~ 0,25

13/14



Droite (D_1) : 0,25 pt

Droite (D_2) : 0,25 pt

Demi-tangentes : 0,25 x 2 pt

Courbe (C) ; 0,5 pt