MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR,
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE,
DU TRANSFERT DES TECHNOLOGIES,
DE L'EDUCATION NATIONALE,
CHARGE DE LA FORMATION CIVIQUE

DIRECTION GENERALE DES EXAMENS ET CONCOURS

REPUBLIQUE GABONAISE
Union-Travail-Justice

BACCALAUREAT
Session : 2021
Série : D
Coef : 4
Durée : 4H

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(L'usage de tout modèle de calculatrice scolaire est autorisé. Cependant, l'utilisation des smartphones, tablettes et autres appareils multimédia est interdite)

Exercice 1 : (QCM) (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, **une seule** des quatre propositions est exacte. Sans justifications, le candidat indiquera sur sa copie, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Une bonne réponse **rapporte 0,5 point**. Une mauvaise réponse **fait perdre 0,25 point**. L'absence de réponse vaut **0 point.**
N.B : Si le total des points est négatif, la note à cet exercice sera ramenée à zéro.

1. Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2;1;1)$, $B(3;0;1)$, $C(0;1;5)$ et $D(-1;0;1)$.

a) Un vecteur normal au plan (ABC) est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\vec{n}(1;2;2)$	$\vec{n}(1;2;-2)$	$\vec{n}(2;0;1)$	$\vec{n}(2;2;1)$

a) L'aire du triangle ABC est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
3	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{\sqrt{5}}{2}$

2. A, B et C sont des points de l'espace, $G = bar\{(A;1),(B;3),(C;1)\}$ et I milieu du segment $[AC]$.

a) Dans ces conditions on peut construire le point G grâce à la relation :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$	$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AI}$	$\overrightarrow{IG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{IB}$	$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BI}$

b) L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|5\overrightarrow{MI}\|$ est

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
La médiatrice du segment $[IG]$	Le plan médiateur du segment $[IG]$	La sphère de centre G et de rayon 5	La sphère de centre I et de rayon 5

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

On définit la suite (v_n) par : $v_n = \ln(u_n)$.

a) La suite (v_n) est définie pour :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$v_5 > 0$	$v_5 < 0$	$v_5 = \ln\left(\frac{36}{35}\right)$	$v_5 = \ln\left(\frac{24}{25}\right)$

b) La limite de la suite (v_n) en $+\infty$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
0	1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

4. Soit (u_n) une suite géométrique telle que : $u_0u_1u_2 = 27$ et $u_0u_2u_4 = -216$.

a) u_0 est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$-1{,}5$	3	1,5	-6

b) La raison q de cette suite est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
2	-2	0,5	$-0{,}5$

5. Une urne contient 3 boules vertes, 4 boules jaunes et 2 boules bleues. On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

a) La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{11}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{7}{18}$

b) La probabilité de tirer deux boules de même couleur est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{19}{18}$

Exercice 2 : Nombres complexes et transformations (5 points)

On considère le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - 3(1+i)z^2 + (-7+30i)z + 33 - 19i.$$

1. a) Calculer $P(1+i)$.

   b) Déterminer les nombres complexes α et β tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :
   $$P(z) = (z-1-i)(z^2 + \alpha z + \beta).$$

   c) Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $(4-3i)^2$

   d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(1+i)z - 7 + 26i = 0$.

   e) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = 5 - 2i$ et $z_C = -3 + 4i$.
   Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(x\,; y)$, associe le point $M'(x', y')$ tel que :
   $$\begin{cases} x' = 2x + 3 \\ y' = 2y - 4 \end{cases}$$

a) On pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, x', y et y' sont des nombres réels.
Montrer que $z' = 2z + 3 - 4i$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

c) Soit (C) le cercle défini par son équation : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$.
Déterminer les coordonnées de son centre Ω et son rayon r.

d) Montrer que le D d'affixe $1 - i$ appartient à (C), puis Construire le cercle (C).

e) Soit (C') l'image de (C) par f. Quelle est la nature de (C') ?

f) En déduire une équation cartésienne de (C')

<u>Problème</u> : Etude d'une fonction **(10 points)**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 - \ln(x^2 + 1) & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité $2\ cm$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -2x - e^{-x}$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations.
3. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) < 0$.

Partie B : Etude de la fonction f

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ puis déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
3. a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$ puis étudier son signe sur cet intervalle.
   b) Dresser le tableau de variations de f. On remarquera que pour $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.
4. a) Démontrer que la courbe (Γ) d'équation $y = -x^2$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
   b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à (Γ).
5. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$ dont l'une α est négative et l'autre λ est positive.
   b) Déterminer la valeur exacte de α et donner un encadrement de λ à 10^{-1} près.
6. Construire les courbes (C) et (Γ).

Partie C : Etude d'une bijection et calcul d'aire

1. Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $]0; +\infty[$.
   a) Justifier h réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
   b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. Quel est l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} ?
   c) Dresser le tableau de variations de h^{-1}.
2. Soit (D) le domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \lambda$.
   a) Hachurer (D) sur le graphique précédent.
   b) Soit $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, en cm^2 du domaine (D). Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ.
   c) Démontrer que : $\mathcal{A}(\lambda) = 4\left(-\frac{\lambda^3}{3} - \lambda^2 + 1\right)$.